树状数组

一、　引言

解题过程中，我们有时需要维护一个数组的前缀和 S[i]=A[1]+A[2]+A[3]+A[4]+…+A[i]。但是不难发现，如果我们修改了一个 A[i]，S[i]、S[i+1]…S[n]都会发生变化。可以说，每次修改 A[i]后，调整前缀和 S 在最坏的情况下会需要 O(n)的时间。当 n 非常大时，程序会运行得非常慢。因此，这里我们引入“树状数组”，它的修改与求和都是 O(logn)，效率非常高。

二、　基本思想

根据任意正整数关于 2 的不重复次幂的唯一分解性质，若一个正整数 x 的二进制表示为 10101，其中等于 1 的为是 0,2,4，则正整数 x 可以被“二进制分解”成 2^4+2^2+2^0。进一步地，区间[1, x]可以分成 O(logx)个小区间：

- 长度为 2^4 的小区间[1, 2^4]
- 长度为 2^2 的小区间[2^4+1, 2^4+2^2]
- 长度为 2^0 的小区间[2^4+2^2+1, 2^4+2^2+2^0]

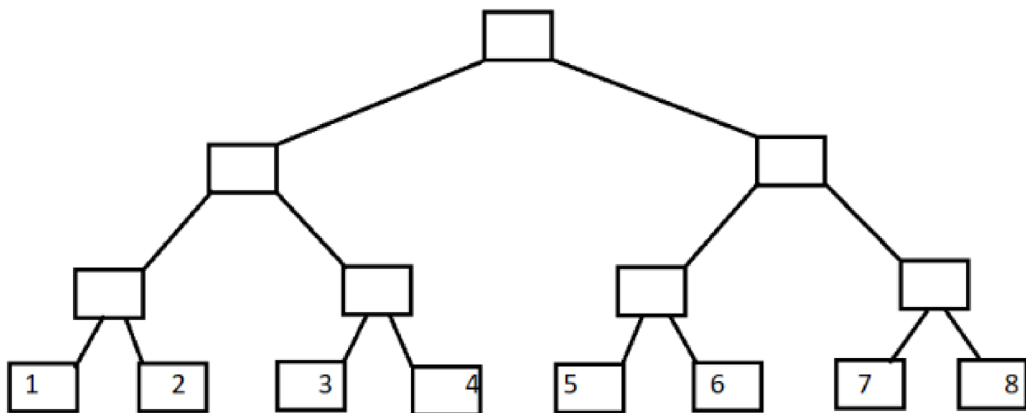
树状数组就是一种基于上述思想的数据结构，其基本用途是维护序列的前缀和。对于区间[1, x]，树状数组将其分为 logx 个子区间，从而满足快速询问区间和。

三、　基本算法

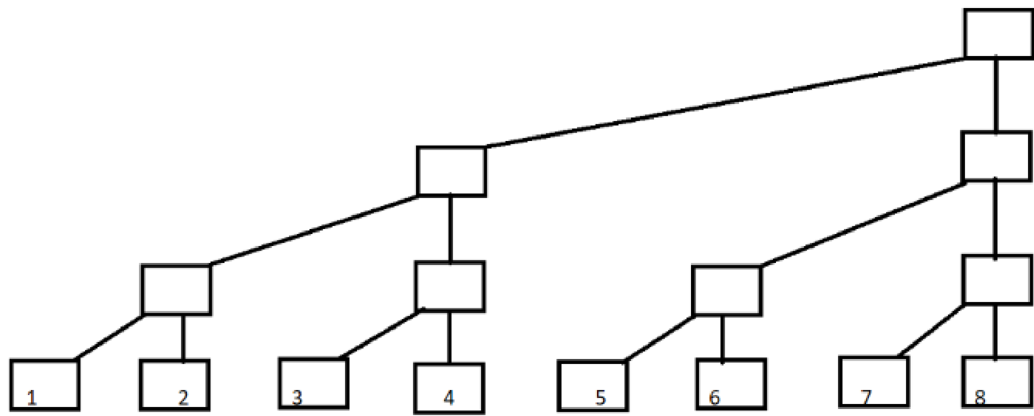
由上文可知，这些子区间的共同特点是：若区间结尾为 R,则区间长度就等于 R 的“二进制分解”下最小的 2 的次幂，我们设为 lowbit(R)。

对于给定的序列 A,我们建立一个数组 c,其中 c[x]保存序列 A 的区间[x-lowbit(x)+1, x]中所有数的和。

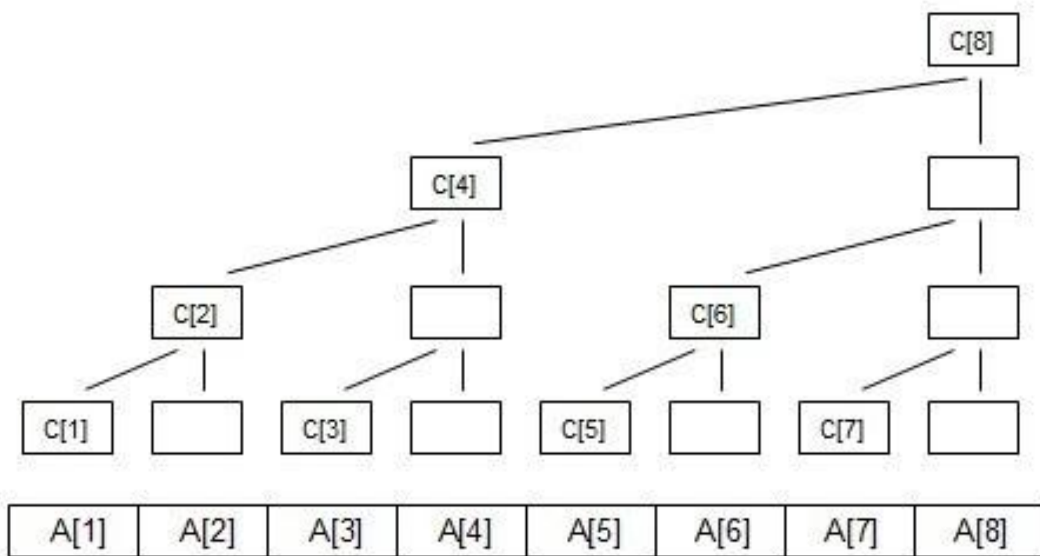
树状数组叶子结点代表 A 数组 A[1]~A[8]



变形一下：



现在定义每一列的顶端结点C[]数组



C[i]代表子树的叶子结点的权值之和 // 这里以求和举例

如图可以知道

C[1]=A[1];

C[2]=A[1]+A[2];

C[3]=A[3];

C[4]=A[1]+A[2]+A[3]+A[4];

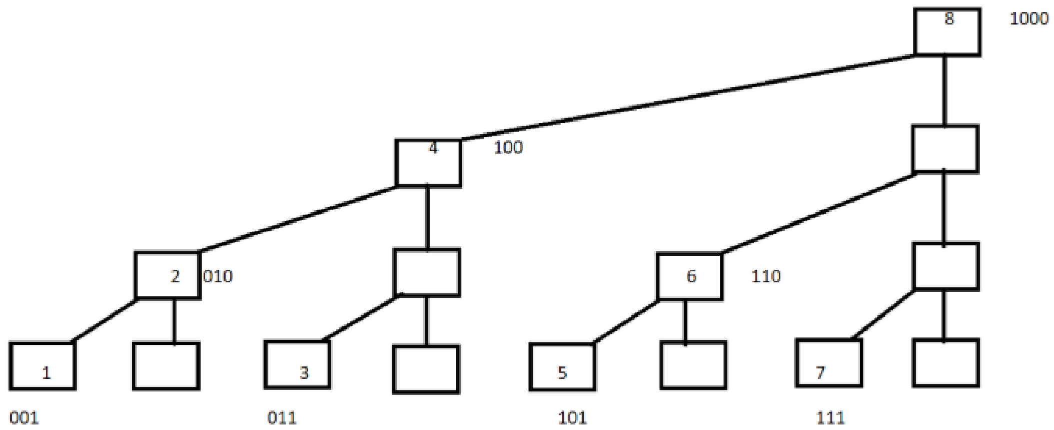
C[5]=A[5];

C[6]=A[5]+A[6];

C[7]=A[7];

C[8]=A[1]+A[2]+A[3]+A[4]+A[5]+A[6]+A[7]+A[8];

下面观察如下图



将C[]数组的结点序号转化为二进制

1=(001)　　　　　C[1]=A[1];

2=(010)　　　　　C[2]=A[1]+A[2];

3=(011)　　　　　C[3]=A[3];

4=(100)　　　　　C[4]=A[1]+A[2]+A[3]+A[4];

5=(101)　　　　　C[5]=A[5];

6=(110)　　　　　C[6]=A[5]+A[6];

7=(111)　　　　　C[7]=A[7];

8=(1000)　　　C[8]=A[1]+A[2]+A[3]+A[4]+A[5]+A[6]+A[7]+A[8];

对照式子可以发现　C[i]=A[i-2^k+1]+A[i-2^k+2]+......A[i];（k为i的二进制中从最低位到高位连续零的长度）例如i=8时，k=3;

可以自行带入验证;

现在引入lowbit(x)

lowbit(x) 其实就是取出x的最低位1　换言之　lowbit(x)=2^k　k的含义与上面相同 理解一下

下面说代码

```
int  lowbit(int  t) { return  t&(-t); }
```

//-t代表t的负数，计算机中负数使用补码来表示

//例如 :

// t=6（0110） 此时 k=1

//-t=-6=(1001+1)=(1010)

// t&(-t)=(0010)=2=2^1

C[i]=A[i-2^k+1]+A[i-2^k+2]+......A[i];

C[i]=A[i-lowbit(i)+1]+A[i-lowbit(i)+2]+......A[i];

四、区间查询

下面利用 C[i]数组，求 A 数组中前 i 项的和

举个例子 i=7;

sum[7]=A[1]+A[2]+A[3]+A[4]+A[5]+A[6]+A[7] ;   前 i 项和

C[4]=A[1]+A[2]+A[3]+A[4];   C[6]=A[5]+A[6];   C[7]=A[7];

可以推出: sum[7]=C[4]+C[6]+C[7];

序号写为二进制: sum[(111)]=C[(100)]+C[(110)]+C[(111)];

再举个例子 i=5

sum[5]=A[1]+A[2]+A[3]+A[4]+A[5] ;   前 i 项和

C[4]=A[1]+A[2]+A[3]+A[4];   C[5]=A[5];

可以推出: sum[5]=C[4]+C[5];

序号写为二进制: sum[(101)]=C[(100)]+C[(101)];

仔细观察二进制 树状数组其实就是二进制的应用

结合代码

```
int  getsSum(int  x)
{
    int  ans=0;
    for(int  i=x;i>0;i-=lowbit(i))
       ans+=C[i];
    return  ans;
}
```

对于 i=7 进行演示

```
                   7(111)              ans+=C[7]
lowbit(7)=001   7-lowbit(7)=6(110)     ans+=C[6]
lowbit(6)=010   6-lowbit(6)=4(100)     ans+=C[4]
lowbit(4)=100   4-lowbit(4)=0(000)
```

对于 i=5 进行演示

	5(101)	ans+=C[5]
lowbit(5)=001	5-lowbit(5)=4(100)	ans+=C[4]
lowbit(4)=100	4-lowbit(4)=0(000)	

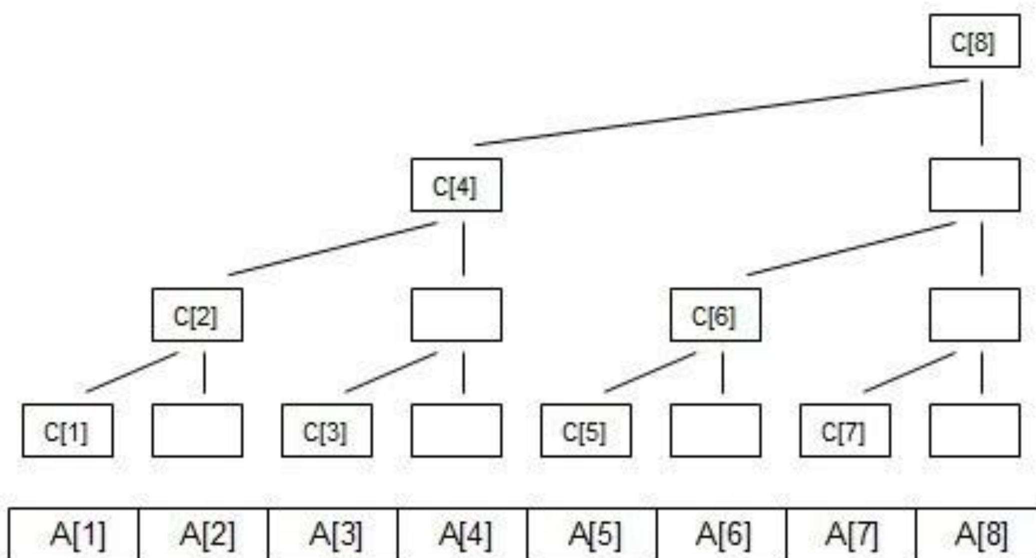
五、单点更新

当我们修改 A[]数组中的某一个值时　应当如何更新 C[]数组呢？

回想一下区间查询的过程，再看一下上文中列出的图

结合代码分析

```
void  update(int  x,int  y){
       for(int  i=x;i<=n;i+=lowbit(i))
           C[i]+=y;
}
//可以发现 更新过程是查询过程的逆过程
//由叶子结点向上更新 C[]数组
```



如图：

当更新 A[1]时　需要向上更新 C[1] ,C[2],C[4],C[8]

写为二进制　C[(001)],C[(010)],C[(100)],C[(1000)]

1(001)		C[1]+=A[1]
lowbit(1)=001	1+lowbit(1)=2(010)	C[2]+=A[1]
lowbit(2)=010	2+lowbit(2)=4(100)	C[4]+=A[1]
lowbit(4)=100	4+lowbit(4)=8(1000)	C[8]+=A[1]

六、注意事项

要注意树状数组能处理的是下标为 1…n 的数组，绝对不能出现下标为 0 的情况。因为 lowbit(0)=0，这样会陷入死循环。

七、例题选讲

【例 1】#130. 树状数组 1 ：单点修改，区间查询
https://loj.ac/problem/130

【例 2】#10114. 「一本通 4.1 例 2」数星星 Stars
https://loj.ac/problem/10114

【例 3】#10115. 「一本通 4.1 例 3」校门外的树
https://loj.ac/problem/10115

八、小结

在线性数据结构方面，树状数组与线段树异曲同工，其优点在于算法时间复杂度低，并且可以大幅度降低程序调试难度，为选手节省时间。

但树状数组的使用条件要求更加严格。它只能处理修改树状数组某一个点的数据，并不能有效处理修改一个区间的数据。不过，对于某些题目，可以对其进行转化，将区间修改的操作转化为端点修改的操作。总之，能用树状数组求解的题目，一定能用线段树求解，但能用线段树求解的题目，不一定能用树状数组求解。