

20241007 模拟赛 sol

北京大学附属中学 徐岩
xuyan160322@163.com

2024 年 10 月 7 日

矩阵

- $n = 1$ 时, 答案为 k^m ; $m = 1$ 时, 答案为 k^n 。先特判
- $n \geq 2, m \geq 2$ 时, 随机生成一组数据观察 ($n \leq m$):

	10	7	5	10	10	7
1	6	7	1	8	10	7
1	10	2	3	10	4	1
2	3	2	4	6	3	3
4	10	5	5	4	8	5

矩阵

- $n = 1$ 时, 答案为 k^m ; $m = 1$ 时, 答案为 k^n 。先特判
- $n \geq 2, m \geq 2$ 时, 随机生成一组数据观察 ($n \leq m$):

	10	7	5	10	10	7
1	6	7	1	8	10	7
1	10	2	3	10	4	1
2	3	2	4	6	3	3
4	10	5	5	4	8	5

- $\max\{A_i\} \leq \min\{B_j\}$, 确定 $\max\{A_i\}$ 后, 行列方案数独立
- 对于任意满足 $\max\{A_i\} \leq \min\{B_j\}$ 的 A, B , 均存在一种 x 的构造:
$$x_{i,j} = \begin{cases} A_i, & i = j \\ B_j, & i \neq j \end{cases}$$

矩阵

- 记 $\max\{A_i\}$ 为 t

矩阵

- 记 $\max\{A_i\}$ 为 t
- 答案为 $\sum_{t=1}^k (t^n - (t-1)^n)(k-t+1)^m$

矩阵

- 记 $\max\{A_i\}$ 为 t
- 答案为 $\sum_{t=1}^k (t^n - (t-1)^n)(k-t+1)^m$
- 当 $k \leq 3 \times 10^7, n \leq 10^9$ 时, 快速幂 $O(k \log n)$ 无法通过

矩阵

- 记 $\max\{A_i\}$ 为 t
- 答案为 $\sum_{t=1}^k (t^n - (t-1)^n)(k-t+1)^m$
- 当 $k \leq 3 \times 10^7, n \leq 10^9$ 时, 快速幂 $O(k \log n)$ 无法通过
- 事实上, 基本问题为计算 x^n , $x \leq 3 \times 10^7$, n 为定值。
- x^n 为积性函数, 可以使用线性筛加速, 复杂度 $O(k + \pi(k) \log n)$
- $(p_j \cdot i)^n = (p_j)^n \cdot (i)^n$
- 当 i 为素数时, i^n 直接用快速幂计算

矩阵

- 记 $\max\{A_i\}$ 为 t
- 答案为 $\sum_{t=1}^k (t^n - (t-1)^n)(k-t+1)^m$
- 当 $k \leq 3 \times 10^7, n \leq 10^9$ 时, 快速幂 $O(k \log n)$ 无法通过
- 事实上, 基本问题为计算 x^n , $x \leq 3 \times 10^7$, n 为定值。
- x^n 为积性函数, 可以使用线性筛加速, 复杂度 $O(k + \pi(k) \log n)$
- $(p_j \cdot i)^n = (p_j)^n \cdot (i)^n$
- 当 i 为素数时, i^n 直接用快速幂计算
- 注意空间限制
- 加强自 AT_arc113_d

毛毛虫

- 问题形如：给你一个点集 $T \subseteq V$ ，询问最小的 k ，使得 $\exists v \in V, T \subseteq \text{Caterpillar}(1, v, k)$ 。
- 站在 1 如何向 v 走？

毛毛虫

- 问题形如：给你一个点集 $T \subseteq V$ ，询问最小的 k ，使得 $\exists v \in V, T \subseteq \text{Caterpillar}(1, v, k)$ 。
- 站在 1 如何向 v 走？
 - 暴力枚举每一个叶子 v ， $O(nm)$ ，30 分
 - 性质 A ($|T| = 1$)，性质 B (菊花图)，性质 C ($|T| \leq 2$) 均显然
 - 性质 D (随机接父亲树)，树高 $O(\log n)$ (证明)
- 向包含 $\text{dep}[v]$ 最大的 v 所在子树走，否则 $\text{dep}[v]$ 将向答案 k 做贡献

毛毛虫

- 问题形如：给你一个点集 $T \subseteq V$ ，询问最小的 k ，使得 $\exists v \in V, T \subseteq \text{Caterpillar}(1, v, k)$ 。
- 站在 1 如何向 v 走？
 - 暴力枚举每一个叶子 v ， $O(nm)$ ，30 分
 - 性质 A ($|T| = 1$)，性质 B (菊花图)，性质 C ($|T| \leq 2$) 均显然
 - 性质 D (随机接父亲树)，树高 $O(\log n)$ (证明)
- 向包含 $\text{dep}[v]$ 最大的 v 所在子树走，否则 $\text{dep}[v]$ 将向答案 k 做贡献
- v 取 $\text{dep}[v]$ 最大的节点

毛毛虫

- 问题形如：给你一个点集 $T \subseteq V$ ，询问最小的 k ，使得 $\exists v \in V, T \subseteq \text{Caterpillar}(1, v, k)$ 。
- 站在 1 如何向 v 走？
 - 暴力枚举每一个叶子 v ， $O(nm)$ ，30 分
 - 性质 A ($|T| = 1$)，性质 B (菊花图)，性质 C ($|T| \leq 2$) 均显然
 - 性质 D (随机接父亲树)，树高 $O(\log n)$ (证明)
- 向包含 $\text{dep}[v]$ 最大的 v 所在子树走，否则 $\text{dep}[v]$ 将向答案 k 做贡献
- v 取 $\text{dep}[v]$ 最大的节点
- 计算 T 中所有点到路径 $(1, v)$ 的距离，最大值即为答案
- 复杂度 $O(m \log n)$

毛毛虫

- 问题形如：给你一个点集 $T \subseteq V$ ，询问最小的 k ，使得 $\exists v \in V, T \subseteq \text{Caterpillar}(1, v, k)$ 。
- 站在 1 如何向 v 走？
 - 暴力枚举每一个叶子 v ， $O(nm)$ ，30 分
 - 性质 A ($|T| = 1$)，性质 B (菊花图)，性质 C ($|T| \leq 2$) 均显然
 - 性质 D (随机接父亲树)，树高 $O(\log n)$ (证明)
- 向包含 $\text{dep}[v]$ 最大的 v 所在子树走，否则 $\text{dep}[v]$ 将向答案 k 做贡献
- v 取 $\text{dep}[v]$ 最大的节点
- 计算 T 中所有点到路径 $(1, v)$ 的距离，最大值即为答案
- 复杂度 $O(m \log n)$
- 改编自 <https://www.luogu.com.cn/problem/CF1328E>

虚无之地

- 记第 0 天到达 $(0, 0)$ 的队伍为第 t 支队伍
- 如果第 t 天末, (x, y) 上有一支队伍, 那么它一定是第 $t - x - y$ 支, 只需要关注第 $t - x - y$ 支的路线

虚无之地 $t = 0$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0							
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								

虚无之地 $t = 1$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	0						
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								

虚无之地 $t = 2$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	2		0					
1	1							
2								
3								
4								
5								
6								
7								

虚无之地 $t = 3$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	3	2		0				
1		1						
2								
3								
4								
5								
6								
7								

虚无之地 $t = 4$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	4				0			
1	3	2	1					
2								
3								
4								
5								
6								
7								

虚无之地

- 记第 0 天到达 $(0, 0)$ 的队伍为第 t 支队伍
- 如果第 t 天末, (x, y) 上有一支队伍, 那么它一定是第 $t - x - y$ 支, 只需要关注第 $t - x - y$ 支的路线

虚无之地

- 记第 0 天到达 $(0, 0)$ 的队伍为第 t 支队伍
- 如果第 t 天末, (x, y) 上有一支队伍, 那么它一定是第 $t - x - y$ 支, 只需要关注第 $t - x - y$ 支的路线
- 需要知道所有编号在 $[0, t - x - y)$ 中的队伍对指路人的影响

虚无之地

- 记第 0 天到达 $(0, 0)$ 的队伍为第 t 支队伍
- 如果第 t 天末, (x, y) 上有一支队伍, 那么它一定是第 $t - x - y$ 支, 只需要关注第 $t - x - y$ 支的路线
- 需要知道所有编号在 $[0, t - x - y)$ 中的队伍对指路人的影响
- 这些队伍如何走的不重要

虚无之地

- 记第 0 天到达 $(0, 0)$ 的队伍为第 t 支队伍
- 如果第 t 天末, (x, y) 上有一支队伍, 那么它一定是第 $t - x - y$ 支, 只需要关注第 $t - x - y$ 支的路线
- 需要知道所有编号在 $[0, t - x - y)$ 中的队伍对指路人的影响
- 这些队伍如何走的不重要
- 如果有 k 支队伍到过 (x, y) , 就会有 $\lceil \frac{k}{2} \rceil$ 前往 $(x, y + 1)$, 有 $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ 前往 (x, y)
- 故指路人状态可以 $O(xy)$ 递推, $dp[0][0] = t - x - y$
- $dp[i][j] + = (dp[i][j] + 1)/2$, $dp[i + 1][j] + = dp[i][j]/2$

虚无之地

- 记第 0 天到达 $(0, 0)$ 的队伍为第 t 支队伍
- 如果第 t 天末, (x, y) 上有一支队伍, 那么它一定是第 $t - x - y$ 支, 只需要关注第 $t - x - y$ 支的路线
- 需要知道所有编号在 $[0, t - x - y)$ 中的队伍对指路人的影响
- 这些队伍如何走的不重要
- 如果有 k 支队伍到过 (x, y) , 就会有 $\lceil \frac{k}{2} \rceil$ 前往 $(x, y + 1)$, 有 $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ 前往 (x, y)
- 故指路人状态可以 $O(xy)$ 递推, $dp[0][0] = t - x - y$
- $dp[i][j] + = (dp[i][j] + 1)/2$, $dp[i + 1][j] + = dp[i][j]/2$
- 最后让第 $t - x - y$ 支队伍从 $0, 0$ 出发, 按现有指路人状态走一遍即可 (不超过 $O(x + y)$ 步)

虚无之地

- 记第 0 天到达 $(0, 0)$ 的队伍为第 t 支队伍
- 如果第 t 天末, (x, y) 上有一支队伍, 那么它一定是第 $t - x - y$ 支, 只需要关注第 $t - x - y$ 支的路线
- 需要知道所有编号在 $[0, t - x - y)$ 中的队伍对指路人的影响
- 这些队伍如何走的不重要
- 如果有 k 支队伍到过 (x, y) , 就会有 $\lceil \frac{k}{2} \rceil$ 前往 $(x, y + 1)$, 有 $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ 前往 (x, y)
- 故指路人状态可以 $O(xy)$ 递推, $dp[0][0] = t - x - y$
- $dp[i][j] + = (dp[i][j] + 1)/2$, $dp[i + 1][j] + = dp[i][j]/2$
- 最后让第 $t - x - y$ 支队伍从 $0, 0$ 出发, 按现有指路人状态走一遍即可 (不超过 $O(x + y)$ 步)
- 原 <https://codeforces.com/problemset/problem/1733/E>

- 先学习 P4198 楼房重建

楼房重建

- 小 A 在平面直角坐标系 $(0, 0)$ 点，每个 $(i, 0)$ 点 $(1 \leq i \leq n)$ 上有楼，初始高度 0
- 有 m 个修改，每次选一个 i 把高度改为 y ，问每次修改后，小 A 能看到多少栋楼。 $n, m \leq 10^5$ 。

楼房重建

- 小 A 在平面直角坐标系 $(0, 0)$ 点，每个 $(i, 0)$ 点 $(1 \leq i \leq n)$ 上有楼，初始高度 0
- 有 m 个修改，每次选一个 i 把高度改为 y ，问每次修改后，小 A 能看到多少栋楼。 $n, m \leq 10^5$ 。
- 记斜率 s_i ，线段树动态维护 $[l, r]$ 中两个信息
 - ① 区间 s_i 最大值
 - ② $[1, l-1]$ 视为平地时的答案

楼房重建

- 小 A 在平面直角坐标系 $(0, 0)$ 点，每个 $(i, 0)$ 点 $(1 \leq i \leq n)$ 上有楼，初始高度 0
- 有 m 个修改，每次选一个 i 把高度改为 y ，问每次修改后，小 A 能看到多少栋楼。 $n, m \leq 10^5$ 。
- 记斜率 s_i ，线段树动态维护 $[l, r]$ 中两个信息
 - ① 区间 s_i 最大值
 - ② $[1, l-1]$ 视为平地时的答案
- 只有单点修改，考虑自底向上左右儿子合并
- 信息 1 直接左右取 \max
- 信息 2 不能直接由左右儿子得到

楼房重建

- 记斜率 s_i ，线段树动态维护 $[l, r]$ 中两个信息
 - 区间 s_i 最大值
 - $[1, l-1]$ 视为平地时的答案

楼房重建

- 记斜率 s_i ，线段树动态维护 $[l, r]$ 中两个信息
 - ① 区间 s_i 最大值
 - ② $[1, l-1]$ 视为平地时的答案
- 左子树的答案可以直接使用， $t2[p] = t2[p * 2] + ???$

楼房重建

- 记斜率 s_i ，线段树动态维护 $[l, r]$ 中两个信息
 - ① 区间 s_i 最大值
 - ② $[1, l-1]$ 视为平地时的答案
- 左子树的答案可以直接使用， $t2[p] = t2[p * 2] + ???$
- 右子树的贡献需要考虑左子树中的“大高个儿”挡住的影响

楼房重建

- 记斜率 s_i ，线段树动态维护 $[l, r]$ 中两个信息
 - ① 区间 s_i 最大值
 - ② $[1, l-1]$ 视为平地时的答案
- 左子树的答案可以直接使用， $t2[p] = t2[p * 2] + ???$
- 右子树的贡献需要考虑左子树中的“大高个儿”挡住的影响
- 基本问题为：cal(i,pre)，计算子树 i 前面站着高度为 pre 的楼时的答案

楼房重建

- 记斜率 s_i ，线段树动态维护 $[l, r]$ 中两个信息
 - ① 区间 s_i 最大值
 - ② $[1, l-1]$ 视为平地时的答案
- 左子树的答案可以直接使用， $t2[p] = t2[p * 2] + ???$
- 右子树的贡献需要考虑左子树中的“大高个儿”挡住的影响
- 基本问题为：cal(i,pre)，计算子树 i 前面站着高度为 pre 的楼时的答案
- 如果 i 为叶子，直接判断，如果 i 为非叶子

楼房重建

- 记斜率 s_i ，线段树动态维护 $[l, r]$ 中两个信息
 - ① 区间 s_i 最大值
 - ② $[1, l-1]$ 视为平地时的答案
- 左子树的答案可以直接使用， $t2[p] = t2[p * 2] + ???$
- 右子树的贡献需要考虑左子树中的“大高个儿”挡住的影响
- 基本问题为： $cal(i, pre)$ ，计算子树 i 前面站着高度为 pre 的楼时的答案
- 如果 i 为叶子，直接判断，如果 i 为非叶子
 - 如果 pre 挡不住 $i * 2$ ，左子树的贡献需要递归计算 $cal(i * 2, pre)$ ，右子树的贡献？ $t2[i] - t2[i * 2]$
 - 如果 pre 挡住了 $i * 2$ ，左子树无贡献，右子树的贡献需要递归计算 $cal(i * 2 + 1, pre)$

楼房重建

- 记斜率 s_i ，线段树动态维护 $[l, r]$ 中两个信息
 - ① 区间 s_i 最大值
 - ② $[1, l-1]$ 视为平地时的答案
- 左子树的答案可以直接使用， $t2[p] = t2[p * 2] + ???$
- 右子树的贡献需要考虑左子树中的“大高个儿”挡住的影响
- 基本问题为： $cal(i, pre)$ ，计算子树 i 前面站着高度为 pre 的楼时的答案
- 如果 i 为叶子，直接判断，如果 i 为非叶子
 - 如果 pre 挡不住 $i * 2$ ，左子树的贡献需要递归计算 $cal(i * 2, pre)$ ，右子树的贡献？ $t2[i] - t2[i * 2]$
 - 如果 pre 挡住了 $i * 2$ ，左子树无贡献，右子树的贡献需要递归计算 $cal(i * 2 + 1, pre)$
- $t2[p] = t2[p * 2] + cal(p * 2 + 1, t1[p * 2])$

楼房重建

```
int cal(int i, double pre){
    if(isleaf[i]) return max[i]>pre; // pre 会不会挡住 i
    else{
        if(pre<max[i*2]) return cal(i*2,pre)+t2[i]-t2[i*2];
        else return 0+cal(i*2+1,pre);
    }
}
// 计算子树 i 前面站着高度为 pre 的楼时的答案
```

- 原题: <https://codeforces.com/gym/104008/problem/H>