NOIp2021 模拟赛题解

2j0s1yydnnoat

2021.9.15　8:00～12:00

飞羽疾电 (kujou)

【Subtask1，2】

首先我们将一条路径用 (w,h) 表示，意为这条路径有 w 次水平移动，h 次垂直移动。

考虑将所有从 S 至 T 的可能形成最短路径的路（即找不到另一条路 w,h 都不大于它）都找出来。计算每条路为最短路时的 k 值，取最大的即可。

【Subtask3】

注意到 k 越大，最短路的长度肯定不减，所以 k 值可以二分。每次二分一个 k，跑最短路 (Dijkstra) 检验即可。时间复杂度为 $O((n+m)\log n \cdot \log s)$。

玩游戏 (game)

【Subtask1】

枚举每个子序列，容易发现每个质数是独立的。枚举这个子序列中出现的所有质因数 p，将子序列中所有数的因子 p 的次数从大到小排序，第 i 个记为 x_i。

容易发现最终得到的数中 p 的次数一定是这些数的中位数，记为 x，则 p 的总贡献为 $\sum |x-x_i|$。时间复杂度为 $O(2^n\sqrt{w})$，其中 w 为值域。

【Subtask2】

对于每个质数 p，将原数列中所有数的因子 p 的次数 x_i 从大到小排序（若 $p \nmid a_i$，则 $x_i=0$），设从左往右第 i 个的排名为 i，考虑其贡献的次数。

在它左边选 $a \in [0,i-1]$ 个，右边选 $b \in [0,n-i]$ 个的贡献为

$$\begin{cases} x_i & a<b \\ -x_i & a>b \\ 0 & a=b \end{cases}$$

其中" 选 k 个" 的意思是选出 k 个 x_j，使它们作为某个质因子出现在选出的子序列中。容易发现这样恰好枚举到了所有情况。我们依次枚举 i,a,b，可以做到 $O(n^3)$。

【Subtask3】

考虑 $a<b$ 时，我们枚举 $d=b-a$，则 $d\in[1,n-i]$。贡献为

$$\begin{aligned} &\sum_{d=1}^{n-i}\sum_{j=0}^{min(i-1,n-i-d)}\binom{i-1}{j}\binom{n-i}{j+d} \\ =&\sum_{d=1}^{n-i}\sum_{j=0}^{min(i-1,n-i-d)}\binom{i-1}{j}\binom{n-i}{n-i-j-d} \end{aligned}$$

注意到

$$\sum_{b=0}^{min(m,a)}\binom{a}{b}\binom{n-a}{m-b}=\binom{n}{m}$$

所以有

$$\begin{aligned} &\sum_{d=1}^{n-i}\sum_{j=0}^{min(i-1,n-i-d)}\binom{i-1}{j}\binom{n-i}{n-i-j-d} \\ =&\sum_{d=1}^{n-i}\binom{n-1}{n-i-d}=\sum_{d=0}^{n-i-1}\binom{n-1}{d} \end{aligned}$$

同理，当 $a>b$ 时，贡献为 $-\sum\limits_{d=0}^{i-2}\binom{n-1}{d}$。

设 $s(x)=\sum\limits_{d=0}^{x}\binom{n-1}{d}$，则总贡献为 $s(n-i-1)-s(i-2)$。

预处理组合数前缀和即可。时间复杂度为 $O(n\log n)$。

仪式感 (sor)

【Subtask1】

$O(2^n)$ 枚举子集统计答案即可。

【Subtask2】

记 $p_x = \sum\limits_{i=1}^{n} [x|S_i]$。我们首先可以发现一个性质：对于当前的 k，若 $x \neq -1$，则 $y \neq -1$，且 $y = p_k$；若 $x = -1$，则 $y = -1$。

证明：$y \neq -1$ 时，S 中所有为 k 的倍数的数的 gcd 一定也为 k 的倍数，设 gcd 为 d；但 d 只能为 k，否则 $x = -1$，矛盾。所以我们只用求出 x 就好了。设 dp_x 表示 gcd 为 x 时最少取多少个数，则答案为 dp_k。转移如下：

$$dp_{\gcd(x,S_i)} = \min(dp_{\gcd(x,S_i)}, dp_x + 1), x \in [2, S_i]$$

其中 x 只要枚举到 S_i 是因为 gcd 有循环节。时间复杂度为 $O(n \sum S_i)$。

【Subtask3】

注意到上一个 dp 有很多无用状态，可以开一个 map 存下有用状态再转移。不清楚能不能通过。

进一步优化，发现这个转移式子很像最短路，按最短路转移即可。复杂度大概是 $O(n^2 \log n)$。

【Subtask4】

设值域为 w。当 $k = 1$ 时，注意到 $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 = 15796638 > w$，所以答案的上界为 7；那么 $k > 1$ 时，答案肯定也不超过 7。所以考虑从小到大枚举答案，检验是否可行。

设当前枚举的答案为 t，即最少选出 t 个数能使它们的 $\gcd = k$。设 f_x 表示选出 t 个数使它们的 $\gcd = x$ 的方案数，那么

$$f_x = \binom{p_x}{t} - \sum_{j=2}^{\lfloor \frac{w}{i} \rfloor} f_{j \cdot x}$$

解释：在所有 x 的倍数中选 t 个，它们的 gcd 也是 x 的倍数。但我们要求恰好为 x，所以要减掉多算的。

如果最后 $f_k > 0$，说明现在 $check$ 的 t 可行，那么它就是答案。否则若 $\forall t \in [1, 7]$，$f_k = 0$，说明无解，$x = y = -1$。复杂度 $O(w \log w)$。

摩拉克斯 (morax)

【简化问题】

先来考虑一个简单版本的问题：我们只有一个北国银行。答案是：

$$\sum_{(x,fa)\in E} w \cdot min(size_x, S - size_x)$$

证明：

不妨设树根为 1。在上面的表达式中，$size_x$ 表示的是在 x 子树中居民的数量，S 表示树中居民的总数量。

考虑如何计算所有居民接收到一枚钟离盾的总时间：对于每一条边，它的贡献为 $w*$ **通过这条边的居民的数量**的总和，即对于每一条边 (x, fa, w)，我们有两种选择：一是选择子树内的所有居民通过该边（此时北国银行在子树外），故此部分贡献为 $w \cdot size_x$；二是选择 x 的子树外的所有点上的居民通过该边进入 x 的子树领取钟离盾（此时北国银行在子树内）。两种方式取 min 即可。

这个简化问题可以通过一遍 DFS 在 $O(n)$ 的时间内解决。

【Subtask1】

暴力枚举两个北国银行的位置。

【Subtask2】

在链上的直接算即可。

【Subtask3】

考虑最终北国银行放置的位置，会有一条没有居民过的边。那么可以枚举该边并将此边断开，使原树分成两个树，再通过上面的方法对两棵树的答案独立计算。时间复杂度为 $O(n^2)$。

【Subtask4】

定义 in_v 为 DFS 时进入 v 点的时间戳，out_v 为 DFS 时离开 v 点的时间戳。

假设只放置一个北国银行，我们就应该找到对于所有边 (v, to, w) ：$\sum\limits_{e\in E} w \cdot min(size_{to}, S - size_{to})$ 的总和。考虑 $size_{to}$ 和 $S - size_{to}$ 什么时候会算到贡献里：$w \cdot min(size_{to}, S - size_{to})$ 为 $w \cdot size_{to}$ 当且仅当 $size_{to} \le \frac{S}{2}$，为 $w \cdot (S - size_{to})$ 当且仅当 $size_{to} > \frac{S}{2}$。

回到 $O(n^2)$ 的解法。我们在 DFS 时在树中移去边 (v, to, w) 。现在有两棵子树，大小分别为：$X = size_{to}, Y = size_1 - size_{to}$。考虑分别在 X, Y 两棵树上解决问题。

第一部分先计算 v 子树中的点的答案：$w \cdot min(size_{to}, X - size_{to})$ 的值的和。通过上述的小技巧，我们可以计算出 $w \cdot size_{to}(\forall size_{to} \le \frac{X}{2}) + w \cdot X(\forall size_{to} > \frac{X}{2}) - w \cdot size_{to}(\forall size_{to} > \frac{X}{2})$。

剩余的部分就是要求出区间 $[l, r]$ 内所有数字 $\le K$ 的和。可以把区间 $[in_{to}, out_{to}]$ 内的点的 w 和 $w \cdot size_{to}$ 丢进两个树状数组，分别统计两类的答案即可。

to 的子树以外的部分做法也很类似。注意要将这些操作在区间 $[1, in_{to} - 1]$ 和 $[out_{to} + 1, n]$ 和子树 Y 上完成。除了从根节点开始的链到 v （to 的子树中包括的节点）。在这条链上 $size_u$ 单调递减，所以用双指针并且记录前缀和。可以减去我们要为 $\le \frac{Y}{2}$ 计算的部分。同样对 $size_1 - size_u$ 做这样的步骤。最后加上我们需要的 $> \frac{Y}{2}$ 的部分，这部分在这条链上递增。

时间复杂度和空间复杂度均为 $O(n \log n)$ 。