

# 20240814 暑假集训模拟赛

xuyan1

2024-08-14

# 因子

容易知道  $k$  取某个质数最优，开个桶统计每个质数的答案即可，复杂度  $O(\sum \sqrt{a_i})$

# 抓内鬼

- 算法一

$k = 1$ 。

不难想到一个简单策略是只在点 1 处放一个小 U 壮丁，其他地方都放小 P 壮丁。这种策略只会在 1 和  $n$  有边时失败，但此时唯一的最短路就是从 1 一步走到  $n$ ，因此只要  $n \geq 3$  就可以在 1,  $n$  都放小 P 壮丁，就解决了。

# 抓内鬼

- 算法二

$u_i \in \{1, n\}$  或  $v_i \in \{1, n\}$ 。

同样先特判掉  $1, n$  有边的情况，然后不难发现只要给  $1$  和  $n$  分配不同来源的壮丁，剩下的点随便分，就一定可以掐断所有路线。或者如果  $k = 0$  或  $k = n$  也是显然有解的。

# 抓内鬼

- 算法三

沿用算法二，先给  $1, n$  分配不同来源的壮丁，不妨假设  $1$  的壮丁是  $P$  而  $n$  的壮丁是  $U$ 。

可以发现，如果存在边  $(1, x)$ ，并且  $x$  的壮丁也是  $P$ ，那就相当于把  $x$  从图里删掉了。这是因为从  $1$  不能一步走到  $x$ ，而其他拐一个弯再到  $x$  的走法不可能是最短路。存在边  $(y, n)$  且  $y$  的壮丁是  $U$  的情况同理。

因此只需要把小  $P$  壮丁贪心分配给  $1$  旁边的点。那么要么是把  $1$  旁边的点都删完了，要么是剩下的小  $U$  壮丁可以把  $n$  旁边的点删完。总之  $1$  和  $n$  肯定有一个是周围的点被删完了。

# 异或序列

- 算法一

从小到大加入数来 **dp**。暴力一点，既然要求连续三个的异或和不为 0，就记录序列的最后两个位置  $x, y$  分别是什么，加入  $z$  的时候要求  $x, y, z$  异或和不为 0。

时间复杂度  $O(n^3)$ ，期望得分 40 分。

# 异或序列

- 算法二

注意到性质：如果连续三个位置  $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}$  违反了题目的限制，那  $(a_{i-1}, a_i, a_{i+1})$  就不可能违反限制了。

设  $f(n)$  表示以  $n$  结尾有多少个合法的序列。使用容斥： $f(n) = 1 + \sum_{i < n} f(i) - C$ ， $C$  是在  $n$  处第一次违反限制的序列数。 $C$  怎么算？如果一个序列  $[\dots, x, y, n]$  在  $(x, y, n)$  第一次违反限制，枚举  $y$ ，如果  $x = (y \oplus n) < y$ ， $C$  就应该加上  $f(x)$ 。

时间复杂度  $O(n^2)$ ，期望得分 60 分。

# 异或序列

- 算法三

对于  $\sum_{i < n} f(i)$  这部分，可以用前缀和优化。

对于  $C = \sum_{y < n} [(y \oplus n) < y] f(y \oplus n)$ ，考虑满足条件的  $y$  有何性质：实际上只要  $y$  的二进制最高位和  $n$  相同就有  $(y \oplus n) < y$  了。此时，枚举最高在哪一位  $y$  和  $n$  不同，则比这一位低的位可以任取，这样  $(y \oplus n)$  就属于一段特定的区间。因此我们把上述求和拆成了  $O(\log n)$  段区间求和，同样可以前缀和。

时间复杂度  $O(n \log n)$ ，期望得分 100 分。



# 数圈圈

- 算法一

枚举每种情况，再暴力判断条件是否满足。

可通过子任务 1，期望得分 5。

- 算法二

预处理从  $x$  开始往右、往下最长的一段连续相同字符，再暴力枚举，这时可以  $O(1)$  判断了。

时间复杂度  $O(n^2m^2)$ ，可通过子任务 1,2，期望得分 15。

# 数圈圈

- 算法三

子任务 3 中，只需要求有多少个矩形，这很容易  $O(1)$  计算。

子任务 4 中，注意圈的大小肯定不大，因此小范围内枚举即可。结合前述期望得分 40。

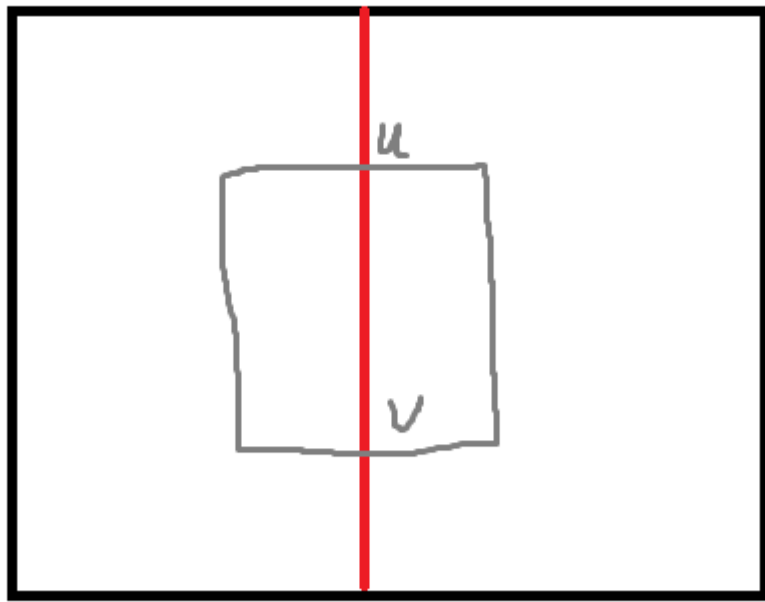
# 数圈圈

- 算法四

考虑对矩阵分治，每次选择长的一边割开，然后计算经过中线（中线长度等于短的一边长度）的“圈”数量。不妨假设是竖着切的。

在下图中，我们对每一对  $(u, v)$  求出左边的  $\square$  和右边对称的形状数量，最终乘起来即可。因为两边是对称的，下面就只描述怎么求  $\square$  数量了。

# 数圈圈



# 数圈圈

- 算法四

设  $L_u$  表示  $u$  往左，相同字符至多能延伸到第几列； $D_{x,y}$  表示  $(x, y)$  往下，相同字符至多能延伸到第几行。则我们要求的是

$$\sum_{i=\max(L_u, L_v)}^{\text{mid}} [D_{i,u} \geq v]$$

若  $L_u \geq L_v$ ，就是求： $\sum_{i=L_u}^{\text{mid}} [D_{i,u} \geq v]$

因为  $L_u$  是固定的，所以这里可以用一个桶存下所有的  $D_{i,u}$ ，做个后缀和就可以  $O(1)$  求出了。

否则，我们发现  $[D_{i,u} \geq v]$  等价于  $[U_{i,v} \geq u]$  ( $U$  表示向上延伸最远能到第几行)，所以做法是一样的。

# 数圈圈

时间复杂度 $O(nm \log nm)$ ，因为递归有 $\log nm$ 层，设短边长 $x$ 长边长 $y$ ，每层用 $x^2 + xy \geq 2xy$ 也即 $O(xy)$ 的时间处理了询问，加起来每层是 $O(nm)$ 。可以通过本题得到 100 分。

当然，如果固定 $u$ 将 $\{D_{i,u}\}$ 看成一个序列，上面就是问序列的某个后缀里有几个数 $\geq x$ ，用树状数组容易优化到 $O(\log n)$ 单次询问。时间复杂度 $O(nm(\log nm)^2)$ 。也可以通过本题得到 100 分。